

# Die Symmetrisierung des MacCormack-Schemas im Atmosphärenmodell GESIMA

D. Hinneburg

## Abstract

The dynamical equations of the non-hydrostatic mesoscale model GESIMA are solved numerically on an Arakawa-C grid. Because of the staggered grid most of the prognostic variables and their derivatives have identical local positions. The functional connection between the fluxes and velocities defined at different places is managed by the MacCormack scheme ignoring the local differences. The systematic errors are diminished by means of alternate down- and upwind shifting of the fluxes after each time step. A cycle of 8 time steps is necessary to achieve approximately symmetrical conditions because of the shift permutations.

Nevertheless, the systematic errors are not completely removed and the iterative calculation of the dynamic pressure is retarded by starting values from eight time steps ago (same permutation of shift directions).

Both shortcomings are avoided by a symmetrized MacCormack scheme without the loss of its advantages of handling strong gradients. The new method is based on the symmetrization of the equations with respect to the passive quantities and on the simultaneous calculation of each equation for opposite shift directions of the active variables followed by averaging both increments. The method is tested for a typical example.

## Zusammenfassung

Die dynamischen Modellgleichungen des nicht-hydrostatischen mesoskaligen Atmosphärenmodells GESIMA sind numerisch auf einem Arakawa-C-Gitter gelöst. Durch die versetzte Anordnung der Größen auf dem Gitter besitzen die Differenzenquotienten (auf den rechten Seiten) und die prognostizierten Größen (auf den linken Seiten) von vornherein die gleiche lokale Position, allerdings nicht in jedem Fall. Das bisher in GESIMA praktizierte MacCormack-Schema stellt den Zusammenhang zwischen den an verschiedenen Gitterstellen definierten Flüssen und Geschwindigkeiten her, indem die Ortsdifferenz zwischen Fluß- und zugehöriger Geschwindigkeitskomponente ignoriert wird. Zur Verringerung der systematischen Fehler erfolgt die direkte Zuordnung einer Flußkomponente abwechselnd (sequentiell) in einem Zeitschritt zur flußabwärts benachbarten Geschwindigkeitskomponente und im nächsten Zeitschritt zur flußaufwärts benachbarten. Nach Ablauf von jeweils 8 Zeitschritten sind die notwendigen Zuordnungspermutationen der 3 Vektorkomponenten zwecks einer annähernden Symmetrisierung des Verfahrens erreicht.

Nachteile des bisherigen Verfahrens sind (a) der nicht vollständige Abbau der jedem Zeitschritt immanenten systematischen Zuordnungsfehler und (b) ein stark erhöhter

Rechenaufwand für die iterative Bestimmung des dynamischen Druckes durch einen um 8 Zeitschritte (jeweils gleiche Zuordnungspermutation) zurückliegenden Startwert.

Beide Nachteile werden durch ein neues, symmetrisiertes MacCormack-Schema vermieden, ohne daß auf die Vorteile bei der Handhabung starker Gradienten verzichtet werden muß. Das Verfahren beruht (a) auf der Symmetrisierung der lokalen Zuordnung für die passiven Größen innerhalb einer Gleichung (d.h. der nicht durch sie prognostizierten Größen) und (b) auf der simultanen Durchführung der zwei entgegengesetzten Zuordnungsrichtungen für jede der 3 Geschwindigkeitskomponenten innerhalb eines Zeitschrittes mit anschließender Mittelung der beiden Inkremente. Das neue Verfahren wurde anhand eines Beispiels geprüft.

## 1. Einleitung

Das nicht-hydrostatische mesoskalige Atmosphärenmodell GESIMA (Kapitza und Eppel, 1992; Eppel, Kapitza u.a., 1995) dient, wie auch andere vergleichbare Modelle (Adrian, 1994; Schlünzen, 1988), der Prognostizierung meteorologischer Größen wie Windgeschwindigkeit, Temperatur usw. in einem begrenzten Gebiet (z.B. Hinneburg und Tetzlaff, 1996). Die grundlegenden Modellgleichungen für diese Größen stellen partielle Differentialgleichungen dar, die aus den dynamischen Bewegungsgleichungen (Pichler, 1986) resultieren und hier nicht wiedergegeben werden sollen (siehe Kapitza und Eppel, 1992). Die numerische Lösung erfolgt in den genannten Modellen auf der Grundlage eines geländeangepaßten Gitternetzes mit Hilfe der Methode endlicher Differenzen.

Eine von den Ausgangsgleichungen abhängende geeignete Lokalisierung der Variablen an den unterschiedlich möglichen Punkten des Gitters (Knotenpunkte, Flächenmittelpunkte, Zellenmittelpunkte usw.) ist Kern eines jeden numerischen Lösungsschemas für Differentialgleichungen nach der Methode endlicher Differenzen auf einem Gitternetz. Durch versetzte Anordnung der Größen auf dem Gitter lassen sich gleiche lokale Positionen für Differenzenquotienten (auf den rechten Seiten der Gleichungen) und prognostizierte Größen (auf den linken Seiten) erreichen und lokale Interpolationen und daraus folgende numerische Diffusion minimieren (Mesinger und Arakawa, 1976).

Die Methode einer geeigneten Variablenbelegung des Gitters ist jedoch für die numerische Aufbereitung nicht aller Modellgleichungen gleichermaßen vorteilhaft. Darüber hinaus kann die Variablenlokalisierung nicht nur nach rechenökonomischen Gesichtspunkten erfolgen, sondern sie hat auch die physikalische Definition der Größen, die Wirkungsweise der modellierten Prozesse und die Lage der Gebietsränder, an denen feste Vorgaben für die Variablen definiert sind, zu berücksichtigen. Im Falle des Abweichens der Lokalisierung einer Größe von der Lokalisierung ihrer durch einen Prozeß bewirkten Veränderung ist eine sorgfältige lokale Rückführung des Änderungsbetrages (Inkrement) zwecks Aktualisierung der betreffenden Größe vorzunehmen.

Die hauptsächlichen Kräfte, die auf eine Luftpartikel wirken und die im mesoskaligen Atmosphärenmodell GESIMA betrachtet werden, sind die folgend aufgeführten:

- a) geostrophischer Druckgradient als großskalige Vorgabe;
- b) Corioliskraft als Folge der Erdrotation;
- c) turbulente Reibung zwischen den Luftschichten bzw. an der unteren Auflage;

- d) Druckstörungen infolge lokaler Temperaturunterschiede (Auftrieb);
- e) dynamischer Druckgradient infolge Staudrucks an Hindernissen (Berge) oder langsameren Luftmassen (Tetzlaff und Theunert, 1984);
- f) Advektion als Folge des ortskonstanten Koordinatensystems.

Aus rechenökonomischen Gründen wird jeder der durch diese Kräfte bewirkten Änderungsprozesse in jeder Gitterzelle nur einmal geführt, und zwar im Mittelpunkt der Zelle. Alle Kräfte, ausgenommen der dynamische Druckgradient, sind so gestaltet, daß sie bei ihrer Anwendung auf mittelpunktsbezogene Variable die Werte der Variablenänderungen ebenfalls an diesem Mittelpunkt erzeugen. Für diese Variablen (z.B. die Temperatur) ergibt sich das zeitliche Voranschreiten als einfache Akkumulierung der Inkremente auf den Ausgangswert.

Ausschließlich der dynamische Druck, der aus der Flußdivergenz infolge aller übrigen Prozesse diagnostiziert wird, erfordert eine dezentralisierte Verteilung der Variablen, damit die von ihm erzeugten Geschwindigkeitsänderungen eindeutig den einzelnen Komponenten zugewiesen werden können. Die eindeutige Zuordnung dieser Inkremente dient zur Wahrung der Massenkonservierung (Flußerhaltung) für die berechnete Luftbewegung.

Aus den genannten Zwängen ergibt sich die in Abb. 1 (hier nur 2-dimensional) gezeigte Gitterstruktur, die einem Arakawa-C-Gitter entspricht (Mesinger und Arakawa, 1976). Hierbei sind die einzelnen Kräfte bzw. Prozesse sowie die skalaren Variablen im Zellenmittelpunkt definiert, die drei Geschwindigkeitskomponenten jedoch sind in Form von Flüssen  $U$ ,  $V$ , und  $W$  auf die verschieden gerichteten Zellenseitenflächen verteilt. Die zur Berechnung der Prozesse nötigen mittelpunktsbezogenen Geschwindigkeitskomponenten sind als sekundäre, aus den Flüssen abgeleitete Hilfsgrößen bereitzustellen.

Ausgehend von der eben beschriebenen und begründeten unterschiedlichen Lage der prognostizierten Größen und ihren Inkrementen besteht die weitere Aufgabe einerseits in der Berechnung mittelpunktsbezogener Werte aus den am Rand definierten Variablen (für die Berechnung der prognostischen Prozesse) und andererseits in der Rückführung der am Mittelpunkt berechneten Inkremente zu den randdefinierten Variablen. Die im Modell GESIMA praktizierte Methode des Hin- und Rückführens von Größen zwischen Zellenrand und -mittelpunkt wird im folgenden Abschnitt näher erläutert.

## 2. Ursprüngliches (sequentielles) Schema

Das im Atmosphärenmodell GESIMA genutzte Verfahren zur Überführung randbezogener Größen zum Mittelpunkt und umgekehrt geht auf Arbeiten von MacCormack (1982) und Bernard (1986) zurück. Unter Umgehung von lokaler Interpolation wird eine systematische Hin- und Rückverschiebung der drei Geschwindigkeitskomponenten (bzw. Flüsse) um je eine halbe Gittereinheit wechselweise windauf- oder -abwärts vorgenommen. Dabei wird jede Komponente nur parallel zur eigenen Richtung verschoben.

Jede der insgesamt acht verschiedenen Kombinationen von Verschiebungen der drei Geschwindigkeitskomponenten erfolgt in einem anderen Zeitschritt (sequentiell) und kollektiv gleichzeitig in allen Zellen. Die einzelnen Zeitschritte weichen voneinander in der Zuordnungsrichtung mindestens einer der drei Größen ab. Das bedeutet, daß sich der

Geschwindigkeitsvektor im Zentrum der Zelle, der zur Berechnung der Modellgleichungen dient, aus Komponenten zusammensetzt, die in jedem von 8 Zeitschritten für verschiedene Seitenflächen gelten. Nach jedem achten Zeitschritt liegt wieder dieselbe Permutation der dreidimensionalen "Schüttelung" der Geschwindigkeitskomponenten vor. Die mittlere zeitliche Entwicklung dieser Größen vollzieht sich daher in Zyklen von jeweils acht Zeitschritten (vgl. Tab. 1 a).

Jeder Zeitschritt zur Integration der Modellgleichungen beginnt mit der Festlegung der Permutation für die Verschiebungsrichtungen der Flußkomponenten zu den Zellenmittelpunkten (vgl. Tab. 1 a). Danach erfolgt an diesen Punkten die formale Umrechnung auf die Geschwindigkeit, die Berechnung der zeitlichen Änderungen infolge der vom Modell erfaßten Kräfte und die Aktualisierung der Geschwindigkeitskomponenten (Addition der Inkremente auf die Variablen). Anschließend werden die aktualisierten Werte in Flüsse umgerechnet und den Ausgangspunkten auf den Gitterflächen zurücküberwiesen (zurückverschoben). Am Ende wird die Korrektur zur Flußerhaltung (über den dynamischen Druckgradienten) hinzugefügt.

Die Flußkorrektur zur Einhaltung der Kontinuitätsgleichung bezieht sich stets auf den im aktuellen Zeitschritt synthetisierten Geschwindigkeitsvektor und ist ähnlich wie dieser nur aller acht Zeitschritte vergleichbar. Da als Startwert für die Iterationen zur Lösung der diagnostischen Gleichung für den dynamischen Druck der Endwert aus dem letzten vergleichbaren Zeitschritt erforderlich ist, muß nach dem beschriebenen Verfahren hierfür auf eine um acht Zeitschritte zurückliegende Situation zurückgegriffen werden (vgl. Tab. 1 a).

Die Notwendigkeit, einen acht Zeitschritte zurückliegenden Wert als Iterationsstartwert verwenden zu müssen, erhöht die Zahl der Iterationen beträchtlich. Gerade dieser Teil des Modells erweist sich als der zeitintensivste. Eine Verbesserung des Schemas (siehe folgenden Abschnitt) ist daher wünschenswert.

### 3. Symmetrisiertes Schema

Die Modifizierung des MacCormack-Algorithmus zur Zeitintegration der Modellgleichungen betrifft (a) die Genauigkeit der Berechnung der Gleichungen innerhalb eines Zeitschritts und (b) die Verteilungsweise der Variablenverschiebungen auf die einzelnen Zeitschritte (vgl. Tab. 1 b):

a) Die rechten Seiten der Modellgleichungen werden bezüglich der Verschiebungsmöglichkeiten der passiven Variablen (d.h. all der Variablen einer Gleichung, die verschieden sind von der durch diese Gleichung prognostizierten, aktiven, Variablen) symmetrisiert, indem die für die definierte Lokalisierung der Gleichungen (im Zellenmittelpunkt) zutreffenden interpolierten Werte jener Größen verwendet werden (und nicht die jeweils wechselweise dorthin verschobenen). Damit ist jede einzelne Modellgleichung hinsichtlich aller passiven Größen vollständig unabhängig von den Permutationen und existiert nur noch in zwei Varianten entsprechend der Vorwärts- oder Rückwärtsverschiebung der aktiven Größe. Die Gleichungen gewinnen damit mehr Realitätsnähe, da die Zahl der unexakt lokalisierten Variablen pro Gleichung von drei auf eins reduziert wurde. Davon sind insbesondere die Coriolis-Drehung, die Bodenreibung und die Vertikalbeschleunigung bei unebenem Gelände betroffen.

b) Während bisher den Modellgleichungen in jedem von acht Zeitschritten eine andere Verschiebungspermutation zugrunde lag, werden jetzt die Modellgleichungen in jedem Zeitschritt zweifach gerechnet: einmal für die Verschiebung eines Flusses von der Grenzfläche in die folgende Zelle hinein und einmal für die Verschiebung in die zurückliegende Zelle hinein. Die aus beiden Teilrechnungen gewonnenen Inkremente werden arithmetisch gemittelt. Damit unterscheiden sich die Zeitschritte auch nicht mehr hinsichtlich der Verschiebungspermutation der prognostizierten Variablen voneinander.

Obwohl an dem bislang verwendeten Prinzip der Verschiebung und Rückverschiebung der Geschwindigkeitskomponenten im Gitter (MacCormack-Algorithmus) weiterhin festgehalten wurde, ließen sich mit den genannten Änderungen entscheidende Verbesserungen in der Angleichung der Situationen zwischen den einzelnen Zeitschritten erreichen. Für die Iterationen zur Lösung der Druckgleichung ist nunmehr die unmittelbar vorhergehende Druckverteilung als Startwert geeignet, wohingegen vorher um acht Zeitschritte zurückgegriffen werden mußte. Mit dem stark verminderten Zeitabstand zur Startwertsituation sinkt die Zahl der nötigen Iterationen. Trotz des Mehraufwandes aufgrund der Doppelberechnungen innerhalb eines Zeitschrittes reduziert sich die Rechenzeit auf ungefähr die Hälfte.

Dank der vollständigen Symmetrisierung der Situationen in verschiedenen Zeitschritten wird mindestens die gleiche Rechenqualität erreicht wie unter Anwendung des bisher genutzten Heun-Schemas, einer Zeitintegration in zwei Schritten (siehe Mesinger und Arakawa, 1976). Deshalb kann auf dieses Prädiktor-Korrektor-Verfahren, das bisher unzweckmäßigerweise mit entgegengesetzten systematischen Fehlern (Verschiebungen) in beiden Teilschritten arbeitete, verzichtet werden, was einen weiteren Rechenzeitgewinn zur Folge hat.

Anhand eines Beispiels wird gezeigt, daß die Modellergebnisse von der Modifikation des Modells nicht beeinflußt werden. Abbildung 2 enthält den Gebietsausschnitt aus der Ostsee- und Boddenlandschaft zwischen Rostock und Insel Rügen, für den eine NW-Anströmung von 7 m/s mit einer Gitterweite von 1 km simuliert wurde. In Abb. 3 sind die für 10 m Höhe berechneten Windgeschwindigkeiten für beide Modelle gegenübergestellt, in Teil a die Geschwindigkeitsbeträge und in Teil b die Winkel; in der oberen Hälfte befinden sich jeweils die Ergebnisse für das modifizierte Modell, in der unteren die des ursprünglichen Modells. Bis in die kleinsten Strukturen hinein erweisen sich die Ergebnisse als nahezu identisch bei fast halbierten Rechenzeit.

## Literatur

- Adrian, G., 1994: Zur Dynamik des Windfeldes über orographisch gegliedertem Gelände, *Berichte des Deutschen Wetterdienstes*, 188.
- Bernard, R. S., 1986: Discrete Solution of the Anelastic Equations for Mesoscale Modelling, GKSS, 86/E/51, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH.
- Eppel, D. P., Kapitza, H., Claussen, M., Jacob, D., Koch, W., Levkov, L., Mengelkamp, H.-T., Werrmann, N., 1995: The Non-Hydrostatic Mesoscale Model GESIMA. Part II: Parameterizations and Applications, *Beitr. Phys. Atmosph.*, 68, 15-41.

- Hinneburg, D., Tetzlaff, G., 1996: Calculated wind climatology of the South-Saxonian/ North-Czech mountain topography including improved resolution of mountains, *Ann. Geophysicae*, 14, 767-772.
- Kapitza, H., Eppel, D. P., 1992: The Non-Hydrostatic Mesoscale Model GESIMA. Part I: Dynamical Equations and Tests, *Beitr. Phys. Atmosph.*, 65, 129-146.
- MacCormack, R. W., 1982: A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow, *AIAA Journal*, 20, 1275-1281.
- Mesinger, F., Arakawa, A., 1976: *Numerical Methods Used in Atmospheric Models, Vol. I*, Global Atmospheric Research Programme (GARP), GARP Publications Series, No. 17.
- Pichler, H., 1986: *Dynamik der Atmosphäre*, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich.
- Schlünzen, H., 1988: Das mesoskalige Transport- und Strömungsmodell 'METRAS' - Grundlagen, Validierung, Anwendung -, *Hamburger Geophys. Einzelschriften*, Reihe A, Heft 88.
- Tetzlaff, G., Theunert, S., 1984: Die Windgeschwindigkeitsabnahme im Bereich der deutschen Nordseeküste bei auflandigem Wind, *Meteorol. Rundsch.*, 37, 43-52.

Adresse: D. Hinneburg  
Institut für Meteorologie  
Universität Leipzig  
Stephanstr. 3  
04103 Leipzig

Zeitschritt	Verschiebungsrichtung	Arbeitsschritte
a) Ursprüngliches Modell		
n	U →      ↑ V	1. Verschiebung der Variablen 2. Prognost. Prozesse ↷ Inkremente 3. Aktualisierung der Variablen 4. Rückverschiebung der Variablen 5. Dynamischer Druck mit <u>Startwert aus Zeitschritt n-8</u> 6. Korrektur der Variablen zur Flußerhaltung
n+1	← U      ↑ V	...
n+2	U →      V ↓	...
n+3	← U      V ↓	...
...	4 verschiedene Verschiebungen des Dupels [U,V] bzw. 8 verschiedene Verschiebungen des Tripels [U,V,W]	
b) Modifiziertes Modell		
n	U →      ↑ V	1. Verschiebung der Variablen 2. Prognost. Prozesse ↷ Inkremente 3. Rückverschiebung der Inkremente
	← U      V ↓	4. Verschiebung der Variablen 5. Prognost. Prozesse ↷ Inkremente 6. Rückverschiebung der Inkremente
	-      -	7. Mittelung der Inkremente aus beiden Verschiebungsrichtungen 8. Aktualisierung der Variablen 9. Dynamischer Druck mit <u>Startwert aus Zeitschritt n-1</u> 10. Korrektur der Variablen zur Flußerhaltung
n+1	...      ...	...
...	Unterschiedliche Verschiebungsrichtungen wirken sich <b>nicht</b> auf den dynamischen Druck aus	

Tab. 1: Schema der Zeitintegration der Modellgleichungen  
 a) ursprüngliches Modell  
 b) modifiziertes Modell

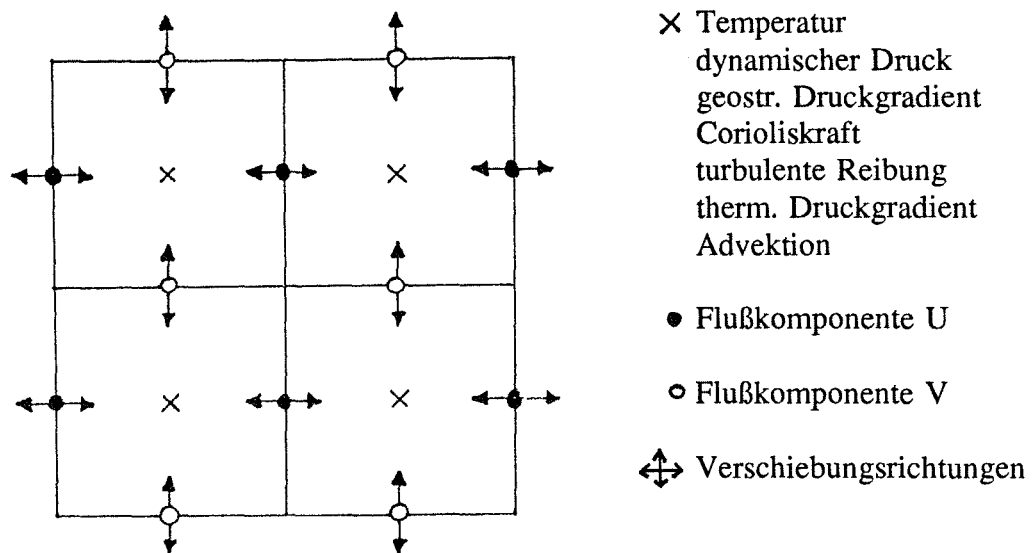


Abb. 1: Räumliches Gitter und Variablenbelegung

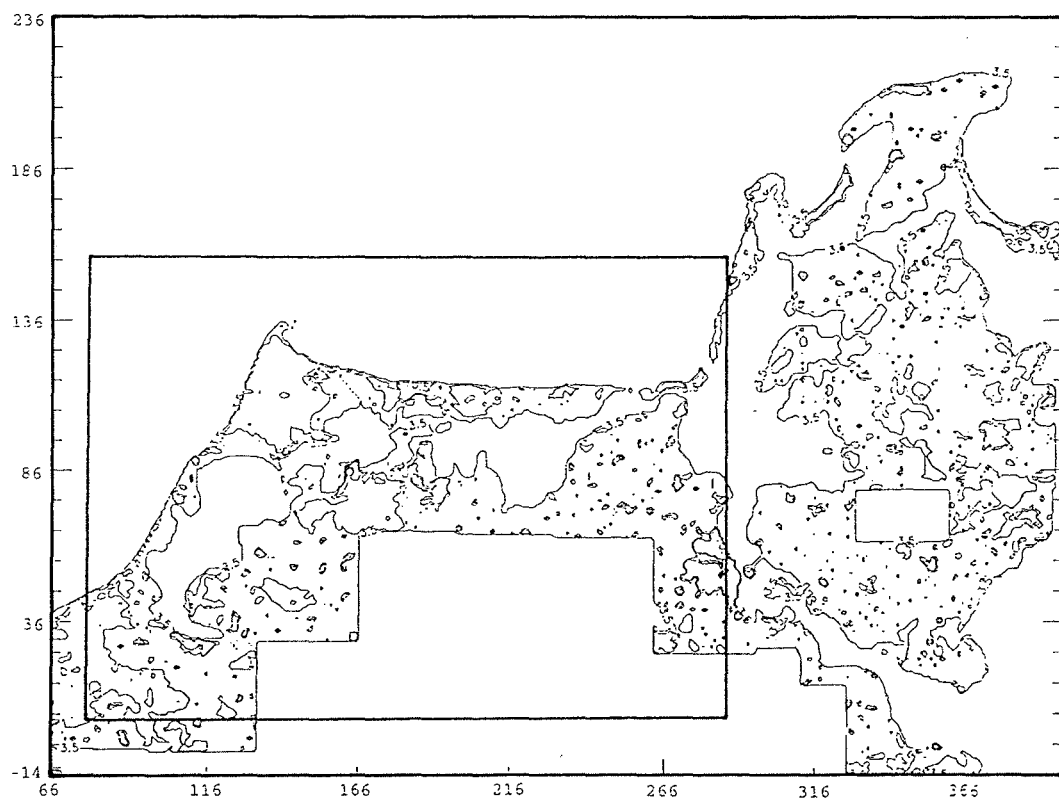


Abb. 2: Lage des Modellgebietes zwischen Rostock und Greifswald mit Rauigkeitsstrukturen (Koordinaten zählen in 250m-Schritten)



NW 7 m/s

Geschwindigkeit (10 m Höhe)

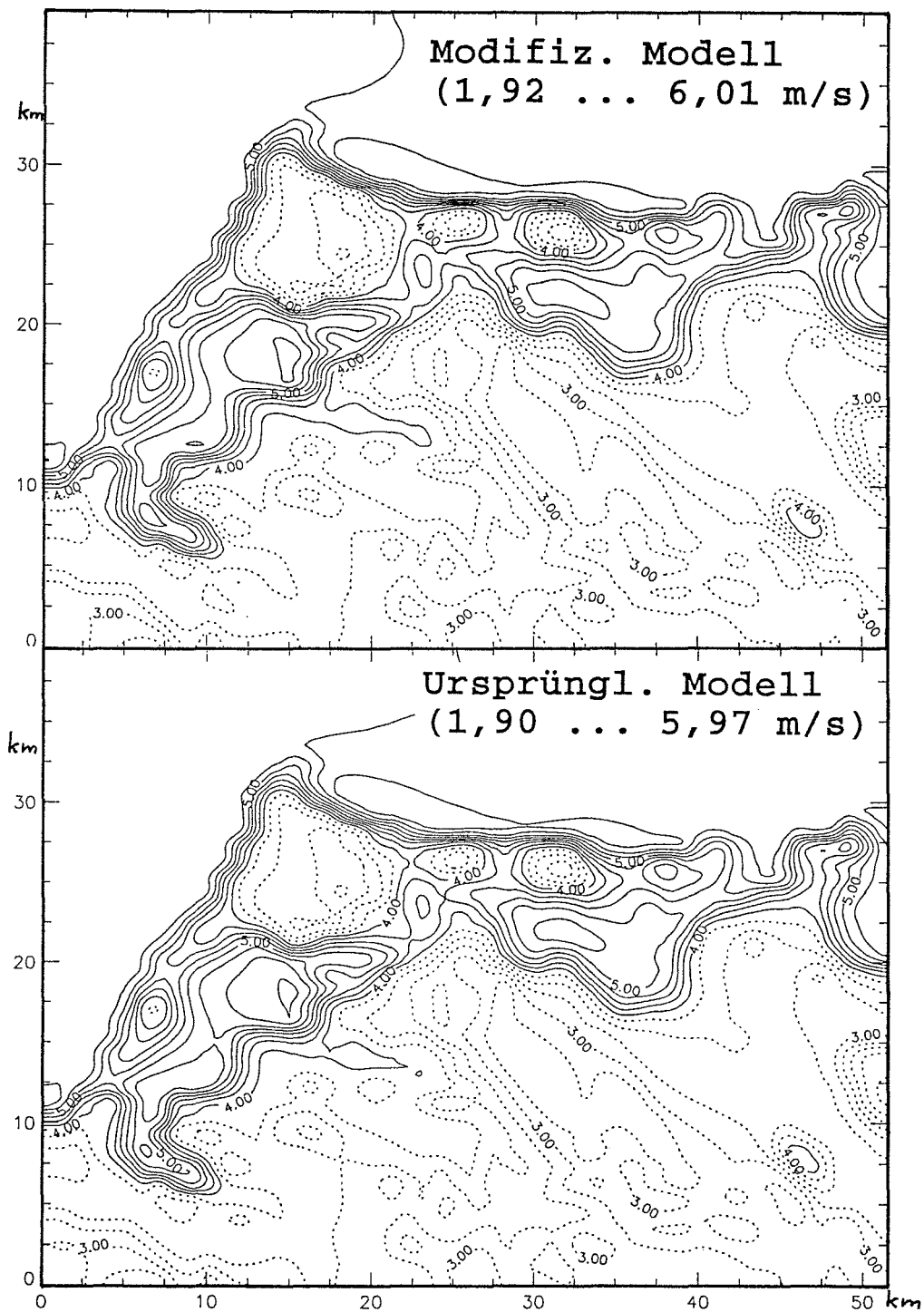


Abb. 3: Vergleich zwischen modifiziertem und ursprünglichem Modell anhand einer NW-Anströmung mit 7 m/s  
 a) Geschwindigkeitsbeträge in 10 m Höhe  
 b) Windrichtung in 10 m Höhe  
 (jeweils mit Angabe von Minimal- und Maximalwert)

NW 7 m/s

Winkel

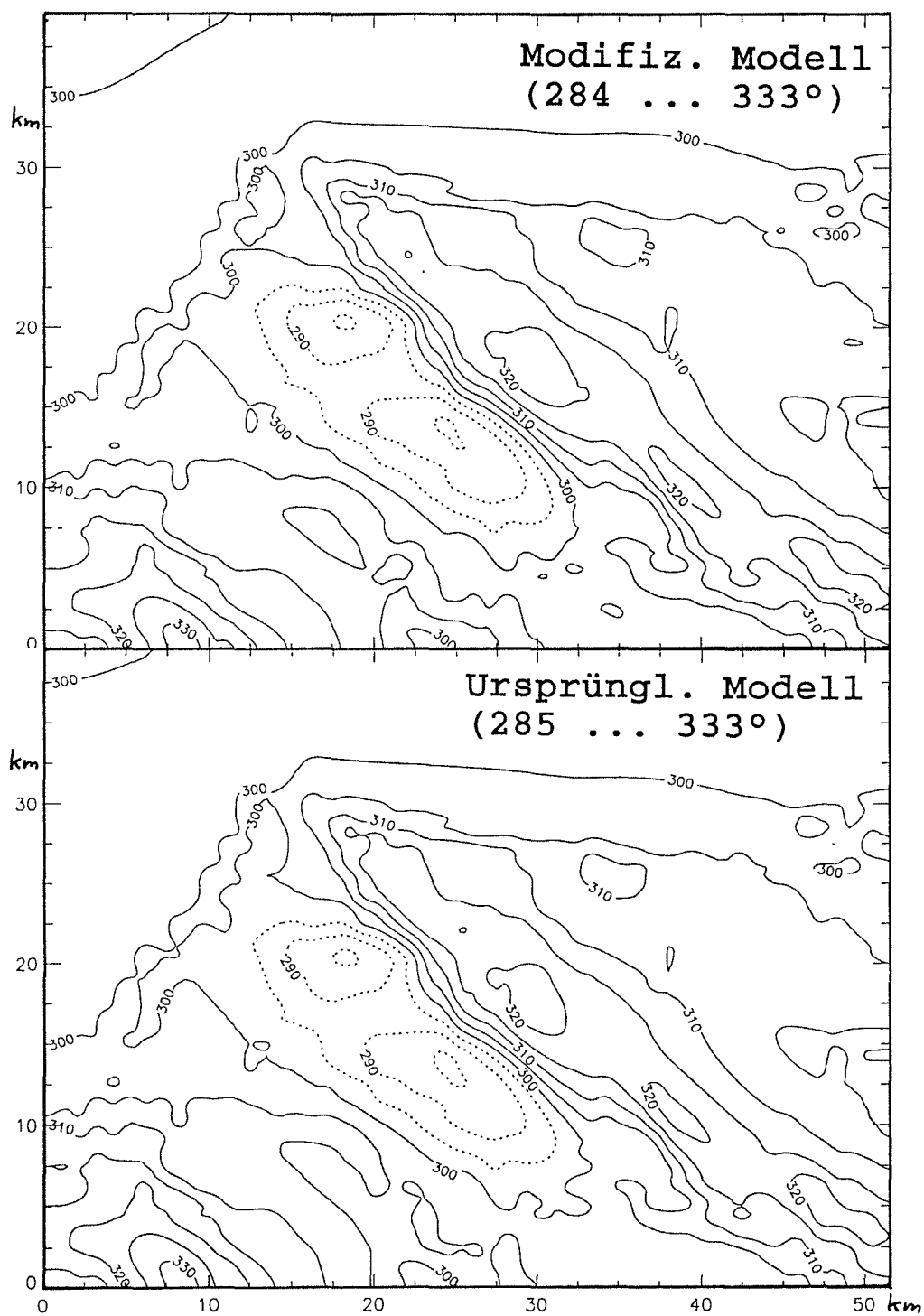


Abb. 3 b